

Ecuaciones Diferenciales II Examen XVII

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Ecuaciones Diferenciales II Examen XVII

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Granada, 2026

Asignatura Ecuaciones Diferenciales II.

Curso Académico 2024/2025.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Rafael Ortega Ríos.

Descripción Convocatoria Ordinaria.

Fecha 12 de junio de 2025.

Ejercicio 1. Se considera la sucesión de funciones

$$f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(t) = t^n(1 - t).$$

a) Calcula $\|f_n\|_\infty = \max_{t \in [0,1]} |f_n(t)|$.

b) ¿Es convergente la sucesión $\{f_n\}$? ¿Es equicontinua?

Ejercicio 2. Prueba que existen dos funciones continuas $x, y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x = x(t)$, $y = y(t)$ tales que se cumple, para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$x(t) = 7 + \int_2^t \frac{y(s)}{1 + y(s)^2} ds, \quad y(t) = 8 + \int_2^t e^s x(s) ds.$$

¿Son únicas estas funciones?

Ejercicio 3. Para cada $n \geq 1$ se considera la solución maximal $x_n(t)$ del problema de valores iniciales

$$\dot{x} = x^5, \quad x(0) = 1 + \frac{1}{n}.$$

Calcula, si existe, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x_n(s)^2 ds$.

Ejercicio 4. Se considera el problema de valores iniciales

$$\ddot{x} - y^3 = 0, \quad \dot{y} = \cos x, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1, \quad y(0) = 1.$$

a) Demuestra que existe una única solución maximal.

b) ¿Está definida esta solución en toda la recta real?

Ejercicio 5. Para cada $n \geq 10^6$ se supone que $x_n :]-1, 1/2[\longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua que cumple

$$x_n(t) = \frac{1}{n} + \int_0^t e^{x_n(s)} ds, \quad t \in]-1, 1/2[.$$

Demuestra que la sucesión $\{x_n\}$ es uniformemente convergente y calcula su límite.

Ejercicio 6. Dado $\varepsilon \in \mathbb{R}$ se considera el problema de valores iniciales

$$\ddot{x} = -x - x^3 y^4, \quad \ddot{y} = -y - x^4 y^3, \quad x(\varepsilon) = \varepsilon, \quad y(\varepsilon) = 0, \quad \dot{x}(\varepsilon) = 0, \quad \dot{y}(\varepsilon) = \varepsilon.$$

a) Prueba que existe una única solución maximal $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon))$ definida para $t \in]-\infty, +\infty[$.

b) Encuentra dos funciones $a(t)$ y $b(t)$ tales que, para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$y(t, \varepsilon) = a(t) + b(t)\varepsilon + o(\varepsilon), \quad \text{si } \varepsilon \rightarrow 0.$$